TD algèbre II - Semestre 4

Série : 02 (Résolution des systèmes linéaires)

30/04/2014
Faculté d'économie de Meknès
Mme. Ben cheikh

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques et Sociales – Meknès

Filière Sciences Economiques et Gestion
- Quatrième Semestre –
Année Universitaire 2013 / 2014

TD de Mathématiques

Série N°2 (Résolution des systèmes linéaires)

Exercice 1 : *Soit le système linéaire suivant*

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ -2x + y + z = 2 \\ -x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

1) Déterminer l'écriture matricielle du système linéaire sous la forme $AX = B$
2) La matrice A est-t-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse
3) En déduire la solution du système linéaire.

Exercice 2 : *Résoudre le système linéaire suivant*

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ 3y - z - 2t = 2 \\ 2z - t = 5 \\ 3t = 12 \end{cases}$$

Exercice 3 : *Résoudre par la méthode de Cramer les systèmes suivants*

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x + 4y + z = 7 \\ 3x + 6y - 2z = 7 \end{cases}$$

Exercice 4 : *discuter la résolution des systèmes linéaires suivants selon la valeur des paramètres a et m*

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^3 z = 1 - m \end{cases}$$

Exercice 5 : *Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss les systèmes suivants*

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x + 4y + z = 7 \\ 3x + 6y - 2z = 7 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} x + y + 2z - t = 2 \\ 2x - z + 3t = 1 \\ 4x + y - z = 3 \\ 3y - 2t = 1 \end{cases}$$

Exercice 6 : *En utilisant la réduction de Gauss, dites lequel de ces trois systèmes admet une solution unique, une infinité de solutions ou n'admet aucune solution*

$$a) \begin{cases} 2x + 4y + 8z = 14 \\ x + y + z = 3 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \; ; \; b) \begin{cases} 2x + 4y + 8z = 8 \\ x + y + z = 3 \\ 2y + 6z = 2 \end{cases} \; ; \; c) \begin{cases} 2x + 4y + 8z = 8 \\ x + y + z = 3 \\ 2y + 6z = 1 \end{cases}$$

Série N° 2

Exercice :

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ -2x + y + z = 2 \\ -x - y - 2z = 3 \end{cases}$$

1- écriture matricielle du système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

2- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_3 + L_1 \\ \\ L_2 + 2L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12$

on remarque que $\det(A) \neq 0$ donc la matrice A est inversible

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t(\text{Co}(A))$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

Donc $x = A^{-1} B$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{4} & -\frac{10}{12} & +\frac{3}{12} \\ -\frac{6}{4} & +\frac{2}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{6}{4} & -\frac{2}{12} & +\frac{15}{12} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{25}{12} \\ -\frac{7}{4} \\ -\frac{5}{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{25}{12} \\ y = -\frac{7}{4} \\ z = -\frac{5}{12} \end{cases}$$

Exercice 2 :

$$\begin{cases} (1)\ x + 2y + z + 3t = 1 \\ (2)\ 3y - z + 2t = 2 \\ (3)\ 2z - t = 5 \\ (4)\ 3t = 12 \end{cases}$$

(4) $\Rightarrow t = \frac{12}{3} = 4$

on remplace t dans (3) $2z - 4 = 5$ donc $z = \frac{9}{2}$

on remplace t et z dans (2) $= 3y - \frac{9}{2} - 8 = 2$ donc $y = \frac{29}{6}$

on remplace t, z, et y dans (1)

$\Rightarrow x + \frac{29}{3} + \frac{9}{2} + 12 = 1$ donc $x = -\frac{151}{6}$

$$S = \left(-\frac{151}{6}, \frac{29}{6}, \frac{9}{2}, 4\right)$$

Exercice 3 :

a) $2x + y = 1$

$3x + 7y = -2$

écriture matricielle du système :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

on a $\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$

Donc on peut appliquer la méthode de cramer :

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{11} = \frac{9}{11}$ $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{11} = \frac{-7}{11}$

$$S = \left\{\frac{9}{11}, -\frac{7}{11}\right\}$$

b) $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$

écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = -3(1) + 1(-6) = 3$$

$$y = \frac{Dy}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = -1 \times (4) - 1(-1) + 1(-7) = 2$$

$$z = \frac{Dz}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = -1(6) + 3(-2) = 0$$

$$S = \{3, 2, 0\}$$

c)
$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x + 4y + z = 7 \\ 3x + 6y - 2z = 7 \end{cases}$$

Écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 1(-4) - 2(-2) + 3(-6) = -28$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & -2 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{2(-14) - 7(-2) + 7(-6)}{-28} = 2$$

$$y = \frac{Dy}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{1(-21) - 2(-11) + 3(-5)}{-28} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{Dz}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{1(-14) - 2(-26) + 3(-22)}{-28} = 1$$

$S = \{2, \frac{1}{2}, 1\}$

Exercice 4:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

calculons D :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 - aL_2 \\ \\ L_3 - L_2 \end{matrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a \\ 1-a & a-1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2-a^2 & 1-a \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$= -(2-a^2-a)(a-1)$$

$$= (a-1)(a+2)(a-1)$$

$$D = (a-1)^2(2-a)$$

Donc $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = 1$ ou $a = -2$

- Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ alors le système est de Cramer et par suite :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(1-a)^2(2+a)} \begin{matrix} L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}}{(1-a)^2(2+a)}$$

$$= \frac{(a-1)^2}{(1-a)^2(2+a)}$$

$$= \frac{1}{2+a}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(1-a)^2(2+a)} \; L_2 - L_2 \; = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(1-a)^2(2+a)}$$

$$= \frac{(1-a)^2}{(1-a)^2(2+a)}$$

$$= \frac{1}{2+a}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(1-a)^2(2+a)} \; L_3 - L_1 \; \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1-a & 0 & 0 \end{vmatrix}}{(1-a)^2(2+a)}$$

$$\frac{(1-a)^2}{(1-a)^2(2+a)} = \frac{1}{2+a}$$

si $a=1$ le système devient

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=1$$

Donc $x = 1-y-z$

Le système admet une infinité de solutions qui s'écrivent sous la forme $(1-y-z, y, z)$ avec $y, z \in \mathbb{R}$

Autrement dit $S = \{(x,y,z) / x = 1-y-z, \ y, z \in \mathbb{R}\}$

si $a=-2$ le système devient :

$$\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=1 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$$

si on additionne les trois équations $0=3$

ce qui est impossible donc le système n'admet pas de solution $\delta \neq \varnothing$ $S=\varnothing$

b) $\begin{cases} x-my+m^2z=2m \\ mx-m^2y+mz=2m \\ mx+y-m^3z=1-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ 2m \\ 1-m \end{pmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 0 & 0 & m-m^3 \\ 0 & 1+m^2 & -2m \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 - mL_1 \\ L_3 - mL_1 \end{matrix}$$

$$= -(1+m^2)(m-m^3) = -m(1+m^2)(1-m^2)$$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m=0$ ou $m^2=1$

$\Leftrightarrow m=0$ ou $m=1$ ou $m=-1$

si $m \neq 0$ et $m \neq 1$ et $m \neq -1$

alors $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2m & -m & m^2 \\ 2m & -m^2 & m \\ 1-m & 1 & -m^3 \end{vmatrix}}{-m(1+m^2)(1-m^2)}$

$y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2m & m^2 \\ m & 2m & m \\ m & 1-m & -m^3 \end{vmatrix}}{-m(1+m^2)(1-m^2)}$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -m & 2m \\ m & -m^2 & 2m \\ m & 1 & 1-m \end{vmatrix}}{-m(1+m^2)(1-m^2)}$$

si $m = 0$ le système devient

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow S = \{(0, 1, z) / z \in \mathbb{R}\}$$

si $m = 1$ le système devient

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$L_1 + L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S = \{(1, y, 1+y) / y \in \mathbb{R}\}$$

si $m = -1$ le système devient

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ -x - y - z = -2 \\ -x + y - z = 2 \end{cases}$$

si on additionne les deux premières équations:

$$0 = -4$$

ce qui impossible, donc le système n'admet aucune solution

Exercice 5:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x + 4y + z = 7 \\ 3x + 6y - 2z = 7 \end{cases}$$

$L_2 - \left(\frac{2}{1}\right)L_1$ et $L_3 - \left(\frac{3}{1}\right)L_1$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 8y - z = 3 \\ 12y - 5z = 1 \end{cases}$$

$L_3 - \left(\frac{12}{8}\right)L_2 = L_3 - \left(\frac{3}{2}\right)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 8y - z = 3 \\ -\frac{7}{2} z = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$(3) \Longrightarrow z = 1$

$(2) \Longrightarrow 8y - 1 = 3 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}$

$(1) \Longrightarrow x - 2\,\frac{1}{2} = 2 \Longleftrightarrow x = 2$

$S = \left\{2, \frac{1}{2}, 1\right\}$

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 2 \\ 2x - z + 3t = 1 \\ 4x + y - z = 3 \\ 3y - 2t = 1 \end{cases}$$

$L_2 - 2L_1$ et $L_3 - 4L_1$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z - t = 2 \\ -2y - 5z + 5t = -3 \\ -3y - 9z + 4t = -5 \\ 3y - 2t = 1 \end{cases}$$

$L_3 - \frac{3}{2}L_2$ et $L_4 + \left(\frac{3}{2}\right)L_2$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z - t = 2 \\ -2y - 5z + 5t = -3 \\ \left(-9 + \frac{15}{2}\right)z + \left(4 - \frac{15}{2}\right)t = -5 + \frac{9}{2} \\ -\frac{15}{2} z + \left(-3 + \frac{15}{2}\right)t = 1 - \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z - t = 2 \\ -2y - 5z + 5t = -3 \\ -\frac{3}{2} z - \frac{7}{2} t = -\frac{1}{2} \\ \frac{15}{2} + \frac{11}{2} t = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$-2L_3$
$2L_4$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z - t = 2 \\ -2y - 5z + 5t = -3 \\ 3z + 7t = 1 \\ -15z + 11t = -7 \end{cases}$$

$L_4 + 5L_3$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z - t = 2 \\ -2y - 5z + 5t = -3 \\ 3z + 7t = 1 \\ 46t = -2 \end{cases}$$

Il suffit maintenant d'appliquer la Méthode de remontée

Exercice 6:

1) $\begin{cases} 2x + 4y + 8z = 14 \\ x + y + z = 3 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$

$L_2 - \left(\frac{1}{2}\right) L_1$
$L_3 - \left(\frac{1}{2}\right) L_1$

$$\begin{cases} 2x + 4y + 8z = 14 \\ -y + 3z = -4 \\ y - 3z = -2 \end{cases}$$

$L_3 + L_2$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 8z = 14 \\ -y - 3z = -4 \\ -6z = -6 \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow -6z = -6 \Rightarrow z = 1$

$(2) \Rightarrow -y - 3 = 4 \Rightarrow y = 1$

$(1) \Rightarrow 2x + 4 + 8 = 14 \Rightarrow x = 1$

$S = \{(1, 1, 1)\}$

2) $\begin{cases} 2x + 4y + 8z = 8 \\ x + y + z = 3 \\ 2y + 6z = 2 \end{cases}$

$L_2 - \left(\frac{1}{2}\right)L_1$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 8z = 8 \\ -y - 3z = -1 \\ 2y + 6z = 2 \end{cases}$$

$L_3 + 2L_2$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 8z = 0 \\ -y - 3z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Donc le système linéaire admet une infinité de solutions.

D'après la deuxième équation :

$$-y - 3z = -1 \Longleftrightarrow y = 1 - 3z$$

D'après la première équation :

$$2x + 4y + 8z = 8 \Longrightarrow x = 4 - 2(1 - 3z) - 4z$$
$$= 4 - 2 + 6z - 4z = 2 + 2z$$

l'ensemble des solutions est :

$$S = \{(2 + 2z, 1 - 3z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

3)
$$\begin{cases} 2x + 4y + 8z = 8 \\ x + y + z = 3 \\ 2y + 6z = 1 \end{cases} \quad \overset{L_2 - \frac{1}{2}L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x + 4y + 8z = 8 \\ -y - 3z = -1 \\ 2y + 6z = 1 \end{cases}$$

$L_3 + 2L_2$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 8z = 8 \\ -y - 3z = -1 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

Donc le système linéaire n'admet aucune solution